Županijsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

05.03.2019.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Uzrok kruženju je Coulombova privlačna sila koja igra ulogu centripetalne sile. Ako naivno uvrstimo brojeve, dobijemo nefizikalan rezultat

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{eQ}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{eQ}{mR}} > c. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Ovdje su e i m naboj i masa elektrona. Prema tome, zaključujemo da brzinu elektrona moramo računati relativistički. Sila na naboj e u stacionarnom električnom polju je i dalje dana Coulombovom silom, bez obzira na brzinu naboja, no izraz za centripetalnu silu će promijeniti oblik. Naime, za relativističko gibanje sila je i dalje jednaka promjeni količine gibanja,

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\gamma m\vec{v})}{\Delta t}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Međutim, za jednoliko kružno gibanje, iznos brzine v je stalan, a samo se smjer mijenja. Budući da Lorentzov faktor γ ovisi samo o iznosu brzine, on je stalan, pa imamo

$$\vec{F}_{\text{cp}} = \gamma m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Primjetimo da, za jednoliko kružno gibanje, akceleracija $\Delta\vec{v}/\Delta t$ nije ništa drugo nego centripetalna akceleracija, po iznosu jednaka v^2/R. Prema tome, izjednačavanje Coulombove sile s relativističkom centripetalnom silom daje

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{eQ}{R^2} = \gamma m\frac{v^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{eQ}{mR} = \chi, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje smo u posljednjem koraku uveli pokratu $\chi = eQ/(4\pi\epsilon_0 mR)$. Izražavanje Lorentzovog faktora preko brzine, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, i rješavanjem za brzinu v imamo

$$\begin{aligned} v &= \frac{\chi}{\sqrt{2}c}\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2c^2}{\chi}\right)^2} - 1} && \text{[2 BODA]} \\ &\approx 2.67 \times 10^8\,\text{m/s}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

2. Ako svjetlost frekvencije ν upada na metal izlaznog rada W, tada izbijeni elektron nosi kinetičku energiju

$$E_\mathrm{k} = h\nu - W, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je h Planckova konstanta. Elektron se može usporiti zakočnim naponom V koje po iznosu mora biti jednako

$$V = \frac{E_\mathrm{k}}{e}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je e elementarni naboj. Prema tome, iz zadanih veličina možemo pisati

$$h\nu_1 = eV_1 + W, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

i

$$h\nu_2 = eV_2 + W. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ovo je sustav od dvije jednadžbe za dvije nepoznanice, izlazni rad W i Planckovu konstantu h. Rješavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} h &= e\frac{V_2 - V_1}{\nu_2 - \nu_1} && [2 \text{ BODA}] \\ &= 6.40 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}, && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} W &= e\frac{\nu_1 V_2 - \nu_2 V_1}{\nu_2 - \nu_1} && [2 \text{ BODA}] \\ &= 3.00\,\mathrm{eV}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

3. Neka je n indeks loma kristala u normalnim uvjetima. Ako se kristal nalazi u električnom polju, tada će, prema uvjetima zadatka, indeks loma za okomitu polarizaciju biti

$$n_\perp = n, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

a za paralelnu polarizaciju

$$n_\parallel = n + \Delta n. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Razlika u vremenu potrebnom da dvije zrake svjetlosti različitih polarizacija prođu kroz kristal duljine a je

$$\Delta t = \frac{a}{c/n_\parallel} - \frac{a}{c/n_\perp} = \frac{a}{c}\Delta n. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Budući da napon V na kondenzatoru stvara električno polje u kristalu

$$E = \frac{V}{d}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

možemo odmah izračunati traženi napon

$$\begin{aligned} V &= \frac{c\Delta t}{a}\frac{d}{\kappa} && [2 \text{ BODA}] \\ &= 100\,\mathrm{V}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

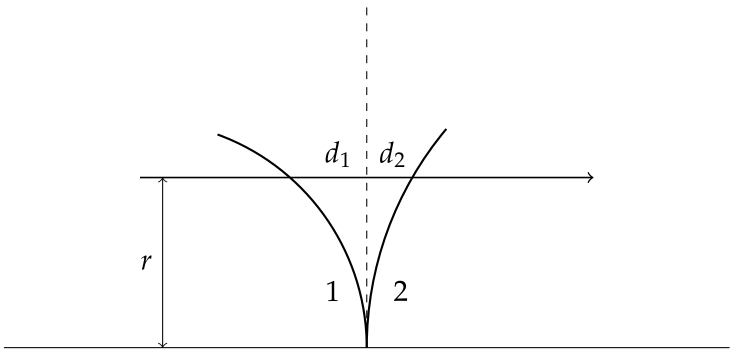
4. Promotrimo zraku svjetlosti koja upada na udaljenosti r od optičke osi sustava. Ako je r dovoljno malen, tj. ako je zraka blizu optičke osi, možemo zanemariti lom prilikom izlaska zrake iz prve leće, kao i prilikom ulaska u drugu leću. Također, možemo zanemariti i otklon prilikom refleksija, tj. uzimamo da je zraka cijelo vrijeme paralelna optičkoj osi. Dalje, zbog zanemarivanja refleksija na ravnim djelovima leća, jedini izvor interferencije su refleksije na zakrivljenim dijelovima leća. Odnosno, do interferencije će doći između zrake koja se nije reflektirala nego izravno prošla iz prve u drugu leću, te one zrake koja se nakon izlaska iz prve leće reflektirala na drugoj leći, okrenula smjer pa se opet reflektirala na prvoj leći te konačno ušla u drugu leću. [1 BOD]

   Budući da se reflektirana zraka je dva puta reflektirala na čvrstom kraju, zraka je dobila ukupni skok u hodu od λ koji ne doprinosi u daljnjem razmatranju. [1 BOD]

   Da bismo odredili pomak u hodu Δx između zrake koja se reflektirala i one koja je izravno prošla iz prve u drugu leću, primjetimo da vrijedi

$$\Delta x = 2(d_1 + d_2), \qquad [1\ \text{BOD}]$$

   gdje su d_1 i d_2 označeni na slici.



   Iz geometrije lako vidimo da vrijedi

$$R_1^2 = r^2 + (R_1 - d_1)^2, \quad R_2^2 = r^2 + (R_2 - d_2)^2. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

   Za mali r, lako je vidjeti da vrijedi $d_1 \ll R_1$ i $d_2 \ll R_2$, pa prilikom kvadriranja možemo zanemariti kvadratne članove d_1^2 i d_2^2. Ovo je standardna aproksimacija prilikom izvođenja Newtonovih prstena. Prema tome, lako je sad dobiti vezu između pomaka u hodu Δx i udaljenosti od optičke osi r

$$\Delta x = 2\left(\frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2}\right) = \frac{r^2}{R_1} + \frac{r^2}{R_2} \quad \rightsquigarrow \quad r = \sqrt{\frac{\Delta x R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

   Za prvi tamni prsten, interferencija mora biti destruktivna, $\Delta x = \lambda/2$, pa imamo

$$r_{1.\ \text{tamni}} = \sqrt{\frac{\lambda R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)}} = 0.15\,\text{mm}, \qquad [2\ \text{BODA}]$$

   dok je za prvi svijetli prsten interferencija konstruktivna, $\Delta x = \lambda$, odnosno

$$r_{1.\ \text{svijetli}} = \sqrt{\frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 0.21\,\text{mm}. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

   Središnja točka odgovara slučaju $r = 0$, što je ekvivalentno uvjetu $\Delta x = 0$, što pak znači da se radi o konstruktivnoj interferenciji i središnja je točka svijetla. [1 BOD]

5. Budući da su Sunce i Zemlja, po pretpostavci, crna tijela u termodinamičkoj ravnoteži, snaga koju primaju u bilo kojem trenu mora biti jednaka snazi koju sami zrače. Zemlja, kao crno tijelo zrači proporcionalno četvrtoj potenciji svoje temperature, prema Stefan-Boltzmannovom zakonu

$$P_{\mathrm{Z,out}} = \sigma T_{\mathrm{Z}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{Z}}^2. \qquad \text{[1 BOD]}$$

S druge strane, Zemlja prima zračenje sa Sunce. Budući da Sunce zrači izotropno, udio zračenja koji Zemlja primi jednak je omjeru površine Zemlje na koju pada zračenje i ukupne površine sfere u koju Sunce zrači, odnosno

$$P_{\mathrm{Z,in}} = \sigma T_{\mathrm{S}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \times \frac{\pi R_{\mathrm{Z}}^2}{4\pi d^2}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje smo uzeli u obzir da je udaljenost između Sunca i Zemlje puno veća od polumjera i Sunca i Zemlje pa ova dva nebeska tijela jedna drugom izgledaju kao plosnati disk. Izjednačavanjem $P_{\mathrm{Z,out}} = P_{\mathrm{Z,in}}$ dobivamo temperaturu Sunca

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{S}} &= \sqrt{\frac{2d}{R_{\mathrm{S}}}} T_{\mathrm{Z}} && \text{[2 BODA]} \\ &= 5.01 \times 10^3\,^\circ\mathrm{C}, && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

gdje smo u međuračunu temperaturu morali računati u kelvinima, a tek na kraju vratiti u stupnjeve Celzija.

Sad isti račun provodimo za Sunce. Izračena snaga iznosi

$$P_{\mathrm{S,out}} = \sigma T_{\mathrm{S}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{S}}^2, \qquad \text{[1 BOD]}$$

dok je primljena snaga većim dijelom zbog termonuklearne reakcije, a dijelom zbog povratnog zračenja sa Zemlje,

$$P_{\mathrm{S,in}} = \sigma T_{\mathrm{Z}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{Z}}^2 \times \frac{\pi R_{\mathrm{S}}^2}{4\pi d^2} + P_{\mathrm{TN}}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Odavde je snaga termonuklearnih reakcija

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{TN}} &= \sigma T_{\mathrm{S}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 - \sigma T_{\mathrm{Z}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{Z}}^2 \times \frac{\pi R_{\mathrm{S}}^2}{4\pi d^2} \\ &= \sigma T_{\mathrm{Z}}^4 \times 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \left[\left(\frac{2d}{R_{\mathrm{S}}} \right)^2 - \left(\frac{R_{\mathrm{Z}}}{2d} \right)^2 \right] && \text{[2 BODA]} \\ &= 2.71 \times 10^{26}\,\mathrm{W}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Efekt povratnog zračenja sa Zemlje na Sunce je numerički zanemariv, no konceptualno je bitan. Ako ga učenik nije uzeo u obzir, a sve drugo je korektno izračunato, umanjiti ukupni broj bodova za dva boda.