Zadaci za općinsko natjecanje 2020. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Magnetsko polje u točki od žice kroz koju teče struja je definirano formulom

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \, ,$$

gdje je I struja a r najmanja udaljenost žice od točke. Magnetsko polje na samoj žici ne dolazi od te žice.

Kako bismo izračunali iznos magnetskog polja moramo odrediti veličine d i l. Primjetimo da točke ABC tvore jednakostranični trokut stranice $a = 1$ m. To znamo jer su svi kutevi unutar trokuta $60°$. **(2 boda)**

Zato možemo pisati:

$$2d = 2 \text{ m} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

Primjetimo da je visina jednakostraničnog trokuta dana s:

$$l = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

A) Jedini doprinos točki A je donja žica (koja prolazi točkom B) udaljena za l. Magnetsko polje je $B_A = 1.73$ μT u smjeru iz papira. **(1 bod)**

B) Iznos polja u točki B je jednak kao i u točki A, jer je jedina žica koja stvara magnetsko polje u toj točki žica koja prolazi točkama AC, udaljena za l. Iznos polja je u papir. **(1 bod)**

C) Točka C kao vrh zamišljenog jednakostraničkog trokuta ABC je udaljena od žice AB upravo za visinu trokuta, l. Budući da je smjer struje u žicama AB i B takav da su magnetska polja od tih žica međusobno suprotna, a da su obje žice jednako udaljene od točke C, polje u toj točki iščezava! $B_C = 0$ **(2 boda)**

D) Točka D se nalazi u središtu svih visina trokuta, jer dijeli visinu u omjeru 2:1. Zato je udaljenost točke D od žice AC i od žice AB jednak i iznosi $r = \frac{1}{3}l$. Obje žice stvaraju magnetsko polje u istom smjeru – u papir. Treća žica B stvara magnetsko polje u smjeru iz papira. Magnetsko polje je:

$$B_D = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{1}{3}\sqrt{3}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{1}{3}\sqrt{3}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$B_D = \frac{\mu_0 I \; 9}{4\pi\sqrt{3}} = 7.79$ μT u papir. **(4 boda)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Period njihala dan je s **(2 boda)**

$$T_{Nj} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Period mase na opruzi je **(2 boda)**

$$T_O = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Podatak koji znamo je da nakon tri puna perioda opruge ($3T_O$) njihalo dođe u ravnotežni položaj. Vrijeme koje njihalu treba za to jednako je četvrtini perioda. Argumentiramo tako da u harmoničkoj oscilaciji kut njihala od ravnoteže možemo prikazati s kosinus funkcijom. Prva nultočka te funkcije je na četvrtini perioda. Postavljamo jednadžbu:

$$0.5\text{s} = 3T_O = \frac{1}{4}T_{Nj}$$

$$0.5\text{s} = 3 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$6.34 \cdot 10^{-3}\text{s}^2 = 9\frac{m}{k} = \frac{1}{16}\frac{l}{g}$$

Iz relacije vidimo da je omjer mase i konstante opruge: **(3 boda)**

$$\frac{m}{k} = 7.04 \cdot 10^{-4}\text{s}^2\ ,$$

te da je duljina niti l: **(3 boda)**

$$l = 6.34 \cdot 10^{-3} \cdot 16\ g\ \text{s}^2 = 99.5\ \text{cm}$$

Zadatak 3 (10 bodova)

Zbog promjene magnetskog polja dolazi do indukcije elektromotorne sile ε u zavojnici s N namotaja po zakonu **(2 boda)**

$$\varepsilon = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

gdje je Φ_B tok magnetskog polja definiran s **(2 boda)**

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha$$

gdje je S površina koju zatvara zavojnica u obliku kvadrata a $\alpha = 60°$ je kut koji zatvara ta površina u odnosu na smjer polja. **(2 boda)**

Površinu u obliku kvadrata možemo izraziti preko duljine stranice $S = a^2$. Uvrštavanjem svih relacija u formulu:

$$\varepsilon = N\frac{\Delta B a^2\cos\alpha}{t}$$

možemo izračunati duljinu stranice **(2 boda)**

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon t}{N\Delta B\cos\alpha}} = 0.032\ \text{m}$$

Zavojnica se sastoji od 100 namotaja gdje je svaki namotaj opsega $4a$, pa je ukupna duljina žice $400\ a$ tj. $L = 12.65$ m. **(2 boda)**

Zadatak 4 (10 bodova)

Elektron u magnetskom polju se giba po kružnici okomito na smjer magnetskog polja, u ovom slučaju kružno gibanje elektrona je u xy-ravnini. U smjeru osi $\hat{z}$ na elektron ne djeluje sila pa mu se ta komponenta brzine ne mijenja. **(2 boda)**

Centripetalna sila koja djeluje na elektron je dana s Lorentzovom silom:

$$F_{CP} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e(v_x B_z(-\hat{y}))$$

Akceleraciju očitamo iz centripetalne sile: $F_{CP} = m_e a$, pa je akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{e v_x B_z}{m_e}\vec{j}$$

Komponente akceleracije u tom trenutku su dakle: $a_x = 0, a_y = 1.76 \cdot 10^8, a_z = 0$ m/s^2. **(3 boda)**

Elektron će ponovno imati brzinu $v_y = 0$ kada prijeđe polovicu kruga. Tada će $v_x = -100$ m/s. **(2 boda)**

Vrijeme koje mu treba da to napravi možemo naći iz brzine elektrona i opsega kružnice. Centripetalnu akceleraciju možemo povezati s obodnom brzinom i radijusom kao:

$$a_{CP} = \frac{v^2}{r}$$

Iz te relacije možemo naći $r = 5.68 \cdot 10^{-5}$ m te opseg $O = 2\pi r = 3.57 \cdot 10^{-4}$ m. Stoga je vrijeme potrebno da pređe pola opsega: $t = \frac{O}{2v} = 1.78\ \mu$s. **(2 boda)**

U tom trenutku će $v_z = 50$ m/s, tj. neće se promijeniti, a put koji će prijeći elektron duž z-osi je: **(1 bod)**

$$s_z = v_z t = 89\ \mu\text{m}$$

Zadatak 5 (10 bodova)

1. Možemo iskoristiti zakon o očuvanju energije. Monika na početku ima brzinu $v = 0$ a nalazi se na visini $H = 40$ m u odnosu na najnižu točku. Zbroj potencijalne i kinetičke energije mora biti konstantan, pa će Monika imati najveću brzinu kada joj je potencijalna energija najmanja, u dnu udubine. **(2 boda)**

2. Pišemo **(3 boda)**

$$0 + mgH = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = 28\ \text{m/s}$$

3. Primjetimo da se Monika u polukružnoj udubini ponaša kao matematičko njihalo duljine niti $l = R$. **(3 boda)**

   Period njihanja je stoga za male odmake od ravnoteže: **(2 boda)**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 12.7\ \text{s}$$