

Županijsko natjecanje iz fizike, 2022.

Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

Zadatak 1 (12 bodova)

Napišimo impedanciju u obje grane:

(2 boda)

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{(\omega C_1)^2}}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \frac{1}{(\omega C_2)^2}}$$

Ukupna struja je zbroj struja u obje grane. U izmjeničnom krugu struja je veličina koja se opisuje iznosom (efektivna vrijednost) i fazom. Jednostavno zbrajanje struja moguće je samo ako su im faze iste. Zaključujemo da je to slučaj u ovom zadatku. Poznat nam je i odnos tih struja pa možemo pisati:

$$I_u = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{3}{2}I_2$$

Dobijemo da su iznosi struja: $I_1 = 9 \text{ A}$, $I_2 = 6 \text{ A}$.

(2 boda)

Faza obje grane dana je u zadatku i iznosi $\varphi = 45^\circ$. Faza struje je relacija reaktancije i otpora. Vrijedi:

$$\tan \varphi = \frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}$$

gdje smo iskoristili reaktanciju $X = 1/\omega C$. Uz iznos kuta, vrijedi: $\tan 45^\circ = 1$, stoga: (2 boda)

$$X_1 = R_1 ; X_2 = R_2$$

Impedancije obje grane su nam poznate iz relacije $Z_x = \frac{V}{I_x}$ gdje je $x = 1, 2$, ovisno o grani. Da bi našli R i C pišemo: (2 boda)

$$Z_1^2 = R_1^2 + X_1^2 = \frac{V^2}{I_1^2}$$

$$Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2 = \frac{V^2}{I_2^2}$$

Za prvu granu imamo:

$$R_1 = \frac{V}{\sqrt{2}I_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega R_1}$$

a jednake relacije vrijede i za drugu granu. Konačno, kapaciteti su: $C_1 = 184 \mu\text{F}$, $C_2 = 123 \mu\text{F}$ a otpori $R_1 = 17.28 \Omega$, $R_2 = 25.93 \Omega$. (4 boda)

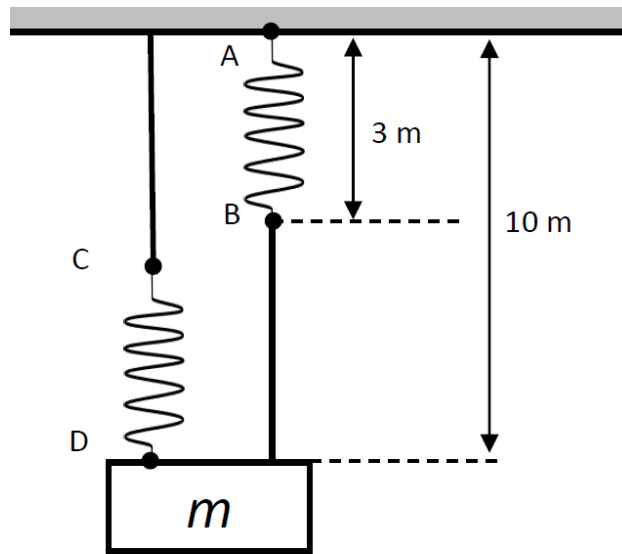
Zadatak 2 (12 bodova)

Iz danih podataka u zadatku prije presijecanja užeta možemo doznati konstantu opruge k . Sila na obje opruge je jednaka, s obzirom da su spojene u seriji i nose isti uteg mase m . Stoga je i rastegnutost tih opruga jednaka. Kako je uteg udaljen 11 m od stropa, a duljina užeta BC je 1 m, svaka opruga je duljine $L = 5$ m. Sila utega izjednačena je sa silom svake opruge: **(2 boda)**

$$F = k(L - l) = mg$$

Iz toga dobijemo da je $k = \frac{mg}{L-l}$. **(1 bod)**

Nakon što je užo BC prerezano, situacija je kao na slici. **(2 boda)**



Dvije opruge su sada spojene paralelno na uteg m , pa je ukupna sila na svaku pojedinu oprugu dvostruko manja nego prije. **(2 boda)**

Iz toga možemo naći novo produljenje opruge: **(2 boda)**

$$F = \frac{mg}{2} = k(x - l)$$

Što nam daje novu duljinu opruge $x = 3$ m. **(1 bod)**

Nova udaljenost utega od stropa je $7 + 3 = 10$ m. **(2 boda)**

Uteg se približio stropu presijecanjem užeta.

Zadatak 3 (8 bodova)

Zavojnica L s unutarnjim otporom R čini serijski spoj RL , stoga se radi o RLC krugu. Impedancija tog kruga dana je s: **(2 boda)**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Struja je maksimalna kada je impedancija minimalna – u slučaju rezonancije: **(2 boda)**

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Kapacitet za rezonanciju mora biti $C = 101 \mu\text{F}$. **(1 bod)**

Snaga disipirana na zavojnici troši se na otporu te zavojnice: $P = I^2 R$. **(2 boda)**
U ovom slučaju:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R} \Rightarrow P = \frac{V^2}{R}$$

Tražena snaga je $P = 1.21 \text{ kW}$. **(1 bod)**

Zadatak 4 (8 bodova)

Promotrimo zavojnicu u kojoj je željezna jezgra postavljena do udaljenosti x . Dio zavojnice $l - x$ je tada bez jezgre. Također uvedimo radi pokrate gustoću namotaja $n = N/l$. Izraz za induktivitet zavojnice tada je:

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} = \mu_r \mu_0 n^2 A l$$

gdje je A površina presjeka zavojnice, $A = \frac{d^2}{4} \pi$. Induktiviteti zavojnice s jezgrom L_j i bez jezgre L_z su tada: **(4 boda)**

$$L_j = \mu_0 n^2 A \mu_r x$$

$$L_z = \mu_0 n^2 A (l - x)$$

Ukupna impedancija je tada: **(1 bod)**

$$L = \mu_0 n^2 A (l + (\mu_r - 1)x)$$

Uvrstimo L u izraz za rezonanciju:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{C \mu_0 n^2 A}} \frac{1}{\sqrt{l + (\mu_r - 1)x}}$$

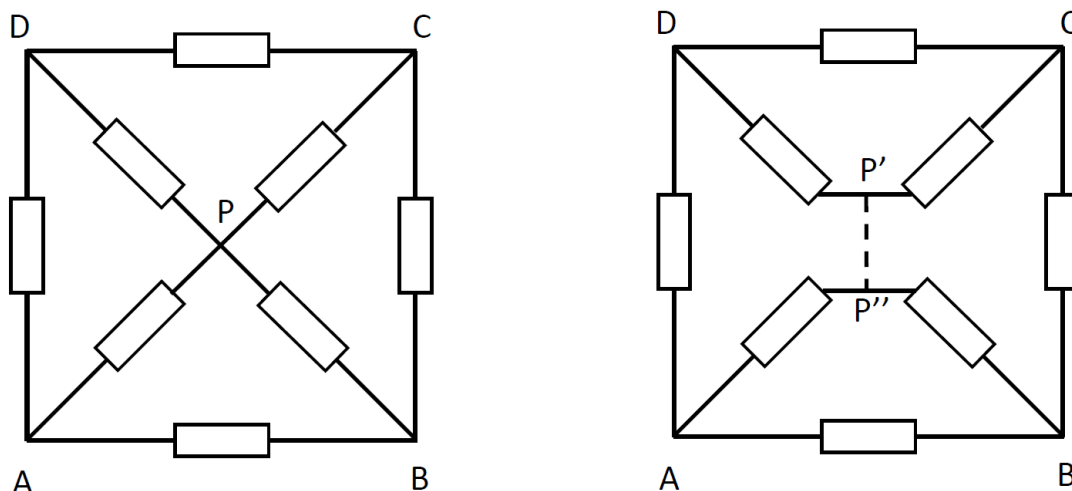
Uz preslagivanje: **(2 boda)**

$$x = \frac{1}{\mu_r - 1} \left(\frac{1}{4\pi^2 f^2 n^2 C \mu_0 A} - l \right)$$

Rješenje je $x = 6.34 \text{ mm}$. **(1 bod)**

Zadatak 5 (10 bodova)

Četverostrana piramida gledana od gore, s otpornicima R na bridovima izgleda kao na slici lijevo. Za rješavanje problema najlakše je podijeliti središnju točku P na dvije točke (P' i P''), kao na slici desno.



Točke su spojene žicom bez otpora (ekvivalentne su). Napon u obje točke je jednak, pa struja ne teče u žici među njima - što znači da za rješenje našeg problema možemo promatrati kao da ta žica ne postoji. Sada smo pojednostavnili krug i možemo ga riješiti konvencionalnim putem. **(5 bodova)**

Izračunajmo prvo otpor X paralelnog spoja DC i $DP'C$:

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \Rightarrow X = \frac{2}{3}R$$

Sada možemo izračunati otpor Y cijele grane $ADCB$:

$$Y = 2R + X = \frac{8}{3}R$$

Ukupni otpor Z između točaka A i B je tada:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{Y}$$

Ukupni otpor je $Z = \frac{8}{15}R = 8 \Omega$.

(5 bodova)

Napomena: ima više načina da se dođe do rješenja zadatka, a ovdje je prikazan možda najkraći, pri kojem se 5 bodova dodjeljuje za pojednostavljenje kruga, 3 boda za izraz rješenja i 2 boda za konačnu vrijednost. Drugi način je riješiti problem po Kirchofovima pravilima – na točke A i B se stavi napon V i riješi se ukupna struja koja izlazi iz izvora. Ukupni otpor se tada dobije iz napona i struje.